Helmut Heugl

Kompetenzentwicklung im Bereich „Modellieren und Argumentieren“

1. Einleitung und Begriffsklärung

Am Beginn ist eine **Begriffsklärung** nötig: Was versteht man unter Kompetenz und insbesondere unter mathematischer Kompetenz?

Abgeleitet von der Kompetenzdefinition von Weinert, definieren wir im Standardkonzept [Peschek, Heugl, 2007]:

> *Unter* ***Kompetenzen*** *werden hier längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und die sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die damit verbundene Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen.*
>
> *Der Erwerb und die Verfügbarkeit kognitiver Kompetenzen bedürfen allerdings der Erweiterung und Ergänzung durch Selbst- und Sozialkompetenz.*
>
> ***Mathematische Kompetenzen*** *beziehen sich auf mathematische Tätigkeiten, auf mathematische Inhalte sowie auf die Art und Komplexität der erforderlichen kognitiven Prozesse.*

Mathematische Kompetenzen haben somit eine ***Handlungsdimension*** (auf welche Art von Tätigkeit sie sich beziehen, also ***was*** getan wird), eine ***Inhaltsdimension*** (auf welche Inhalte sie sich beziehen, also ***womit*** etwas getan wird) und eine ***Komplexitätsdimension*** (bezogen auf die ***Art und den Grad der Vernetzungen***).

Für jede Dimension mathematischer Kompetenzen sind unterschiedliche Bereiche vorstellbar: Unterschiedliche mathematische Handlungen, unterschiedliche mathematische Inhalte sowie unterschiedliche Arten und Grade der Komplexität.

Im österreichischen Modell (AHS und APS) wurden in den drei Dimensionen wieder verschiedene Bereiche unterschieden, in der Handlungsdimension:

- H1: Darstellen, Modellbilden
- H2: Rechnen, Operieren
- H3: Interpretieren
- H4: Argumentieren, Begründen

Eine spezifische **mathematische Kompetenz** in dem hier verwendeten Sinne wird also charakterisiert durch eine bestimmte ***Handlung***, die an einem ***Inhalt*** mit einer bestimmten ***Komplexität*** ausgeführt wird, also durch ein **Tripel** (z. B. (H3, I2, K2)).

2. Kompetenzentwicklung

Durch Standards und die zentrale Reifeprüfung werden Kompetenzerwartungen ausgedrückt. Aufgabe der Lehrer(innen) ist es, die Entwicklung der Kompetenzen der Lernenden unter Beachtung des Bildungsauftrages der Schule und insbesondere des Faches Mathematik zu begleiten. Dazu genügt es aber nicht, passende Aufgaben zu suchen. Es müssen vielschichtige Aspekte beachtet werden, wie zum Beispiel:

- ⇨ Methodisch/didaktische Aspekte
- ⇨ Lernpsychologische Aspekte
- ⇨ Volitionale und motivationale Aspekte

- ⇨ Kompetenzorientierte Aufgabenkultur

Alle Aspekte zu behandeln würde den Rahmen des Vortrags sprengen, daher beschränke ich mich auf Bemerkungen zum Lernpsychologischen Aspekt und konzentriere mich auf die kompetenzorientierte Aufgabenkultur.

Lernpsychologische Aspekte

Unsere Untersuchungen im Rahmen von Standardvergleichsarbeiten in der Sekundarstufe II bestätigen die Notwendigkeit der Berücksichtigung dieses Aspekts. Mag. Erich Svecnik vom BIFIE Graz hat unter anderem auch die Abhängigkeit des Erfolges vom Lerntyp, die Genderabhängigkeit und die Abhängigkeit von der Technologienutzung untersucht. An dem hier zitierten Test nahmen über 7000 Schüler(innen) der 7.Klassen (11. Schulstufe) teil, das ist immerhin ein Drittel der Schülerpopulation der österreichischen AHS in dieser Schulstufe.

Ein Auszug aus den Ergebnissen

- ⇨ Die elaborativen Lerntypen (bevorzugen eigenständiges, entdeckendes Lernen) schneiden signifikant besser ab als die reproduktiven Lerntypen (bevorzugen wiederholendes, nachahmendes Lernen).
- ⇨ Die Mädchen schneiden schlechter ab als die Burschen. Die Mädchen sind mehrheitlich vom reproduktiven Lerntyp, die Burschen eher vom elaborativen Lerntyp. Die elaborativ lernenden Mädchen schneiden aber deutlich besser ab als die reproduktiv lernenden Burschen.
- ⇨ Schüler(innen) aus Technologieklassen (CAS, Grafikrechner usw.) schneiden signifikant besser ab als Schüler(innen) mit traditionellen Hilfsmitteln (numerischer Taschenrechner), obwohl das Rechenhilfsmittel bei diesem Test nicht von Bedeutung war.

Folgerung:

- Sowohl die methodisch/didaktischen Konzepte als auch die Aufgabenkultur sollten Anregungen zum elaborativen Lernen geben. Insbesondere sollte man für Mädchen Anreize zum elaborativen Lernen anbieten.
- Die Nutzung der Technologie als didaktisches Werkzeug und nicht nur als Rechenmachine fördert auch Kompetenzen im Bereich Modellieren, Argumentieren und Interpretieren.

3. Kompetenzorientierte Aufgabenkultur

Mögliche Orientierungen der Aufgabenkultur

- ⇨ **Beispielorientierung:**
  Konzentration auf genau diese Aufgabe, ohne eine Einbettung in ein ganzes Problemfeld mitzudenken. Trainieren möglichst vieler gleichartiger Aufgaben.
- ⇨ **Methodenorientierung:**
  Im Zentrum stehen die eingesetzten Unterrichtsmethoden und damit die Vermittlung überfachlicher Kompetenzen (Sozialkompetenz, Methodenkompetenz, Personalkompetenz), die Fachkompetenz ist eher zweitrangig.
- ⇨ **Feldorientierung**
  Bewusste Einbettung der Aufgabe in ein inner- oder außermathematisches Themenfeld. Reflexion des Verfahrenseinsatzes und der Übertragbarkeit der Kenntnisse und Handlungen. Wechsel des Kontextes. Generieren von adäquaten Aufgaben durch die Lernenden [Bruder, 2007].
- ⇨ **Kompetenzorientierung**

Ziel des Lernprozesses ist die Aneignung langfristiger verfügbarer Kompetenzen und nicht nur das Abarbeiten von mathematischen Inhalten.

Die kompetenzorientierte Aufgabenkultur erfordert nicht sensationell neue Beispiele, sondern eine neue Brille, mit der man aus der Handlungsdimension des Kompetenzmodells auf die Ziele und die Qualität der Aufgaben schaut.

Traditionell ist der Blick aus der Inhaltsdimension, man versucht die Inhalte des Lehrplans abzuarbeiten. Bei der Kompetenzorientierung stehen die mathematischen Handlungen der Lernenden im Mittelpunkt, die bei der Bearbeitung von Inhalten auszuführen sind.

Kriterien für kompetenzorientierte Aufgabenkultur

- Bildungstheoretische Orientierung als Entscheidungsgrundlage
- Beachtung aller 3 Dimensionen mathematischer Kompetenz: Handlungen, die an Inhalten mit einer gewissen Komplexität ausgeführt werden.
- Ausgewogene Berücksichtigung aller 4 Handlungsbereiche:
  - Darstellen, Modellbilden
  - Operieren, Rechnen
  - Interpretieren
  - Argumentieren, Begründen
- Betonung des Reflektierens, verstärktes Einsetzen von Reflexionswissen
- Bewusstmachen notwendiger Grundkompetenzen
- Bewusstmachen heuristischer Problemlösestrategien
- Variation der Aufgabentypen (siehe unten)
- Anregungen zum Erwerb überfachlicher Kompetenzen (Methodenkompetenz, Sozialkompetenz, Personalkompetenz)
- Einsetzen kompetenzorientierter Diagnoseeinstrumente

Variation der Aufgabentypen

Die meisten Unterrichtsaufgaben sind vom Typ: „gegeben – Lösungsweg bekannt – gesucht“. Dieser Aufgabentyp forciert aber vor allem die Rechenfertigkeit.

Aufgabenformate und –typen

Quelle: Regina Bruder , TU Darmstadt

Gegebenes	Problem-lösung	Gesuchtes	
✓	✓	✓	Gelöste Aufgabe (stimmt das?)
✓	✓	?	einfache Bestimmungsaufgabe
?	✓	✓	einfache Umkehraufgabe
✓	?	✓	Beweisaufgabe, Spielstrategie
✓	?	?	Schwere Bestimmungsaufgabe
?	?	✓	Schwierige Umkehraufgabe
?	✓	?	Erfinden einer Aufgabe
?	?	?	Offene Problemsituation

Regina Bruder [Bruder, 2006] findet man eine gute Klassifizierung möglicher Aufgabentypen. Eine Variation der Typen unterstützt die verschiedenen Aspekte der Kompetenzentwicklung.

4. Kompetenzentwicklung aus der Sicht der Handlungsbereiche

Wie schon betont, ist ein wesentliches Merkmal der kompetenzorientierten Sichtweise der Blickwechsel vom Inhalt zur mathematischen Handlung (natürlich ausgeführt an Inhalten). Von den 4 Handlungselementen unseres Kompetenzmodells wird hier das „Darstellen, Modellbilden“ nur kurz und das „Argumentieren Begründen“ etwas ausführlicher behandelt.

4.1 Schwerpunkt: Darstellen, Modellbilden

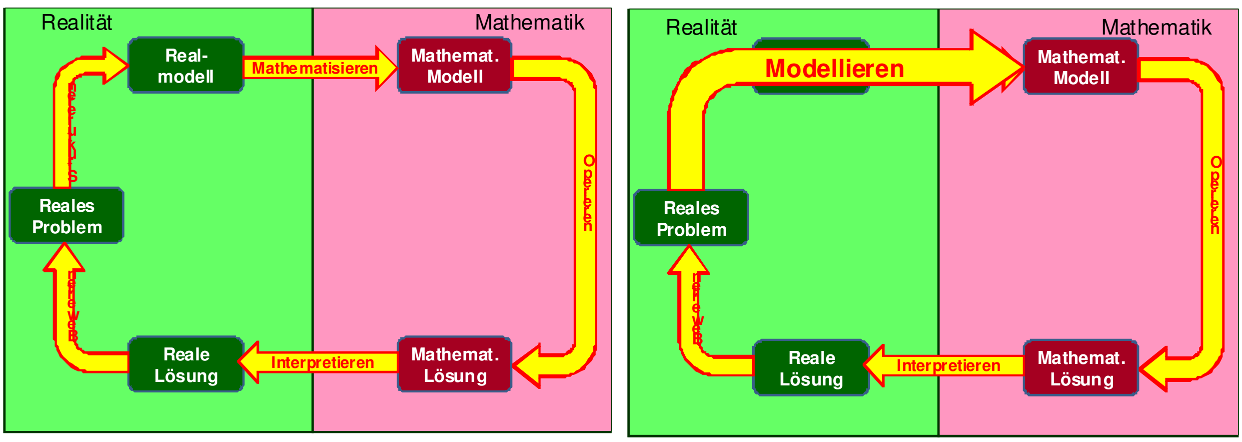
Am Anfang steht wieder eine Begriffsklärung. Ich verwende wieder die Deutungen aus dem österreichischen Kompetenzmodell [Peschek, Heugl, 2007].

Darstellen *meint die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform.*
Modellbilden *erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegeben Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä.*
Die 4 Elemente der Handlungsdimension des Kompetenzmodells spiegeln die wesentlichen Phasen des Problemlösekreislaufs wider.

Der Problemlöseprozess beginnt häufig bei Problemen der realen Welt, das Modellieren führt in die mathematische Welt, das Interpretieren bedeutet die Rückkehr in die reale Welt.

Modellbilden als Teil des Problemlösekreislaufs

Mathematik ⇔ Problemlösen durch Schließen



Diese „Übersiedung“ von der realen Welt in die „Modellwelt“ der Mathematik ist daher keine innermathematische Tätigkeit, die einfach mit „wahr“ oder „falsch“ bewertet werden kann, sondern ein Abwägen, ob in dieser Lernstufe brauchbare Modelle zur Beschreibung des realen Problems verfügbar sind.

Natürlich erfolgt der Ablauf des Problemlöseprozesses nicht so linear in dieser Reihenfolge. Es entwickelt sich ein ständiger Regelkreis zwischen diesen Tätigkeiten. Auch während des Modellbildens ist Interpretieren notwendig, während des Operierens ist das Testen und Interpretieren der mathematische Lösung erforderlich, und schließlich führt das Interpretieren oft zur Anpassung und Veränderung des Modells.

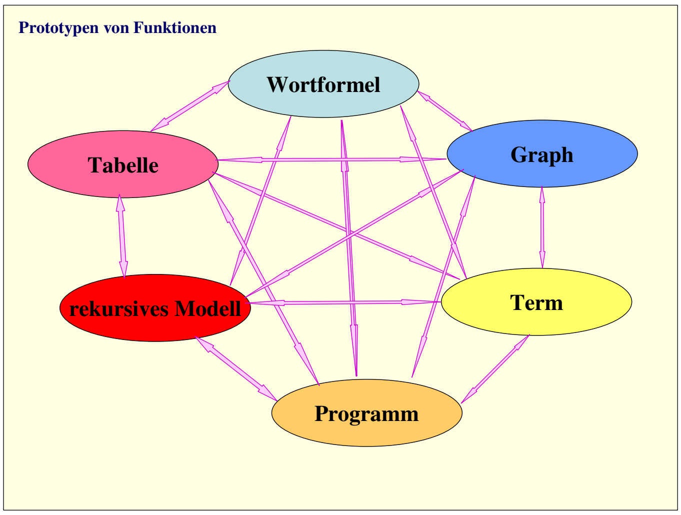
Es geht also beim Modellbilden um das Erkennen von Mathematisierungsmustern, um das Erkennen von Abhängigkeiten zwischen Größenbereichen. „Modellierungskompetenz“ entwickeln bedeutet daher, das Repertoire an mathematischen Modellen schrittweise zu erweitern. Die Entwicklung der dazu gehörigen Denkprozesse und Begriffe erfolgt oft vorteilhaft anhand gegenständlicher Vorstellungen oder „Prototypen“ [Dörfler; 1991]. Ein Kind erlernt den Begriff „Tisch“ ja auch nicht durch eine saubere Definition des „Tisches“, sondern es erlebt verschiedenen Prototypen, aus deren Gemeinsamkeiten sich der Begriff entwickelt.

Genauso erlernen Schüler(innen) im Laufe ihres Lernprozesses die verschiedenen Funktionsarten durch die Erfahrung mit verschiedenen Darstellungsformen oder Prototypen.

Beispiele zum „Prototypenlernen“

Das Erkennen von Abhängigkeiten zwischen Größenbereichen – also das Funktionenlernen beginnt ja nicht erst, wenn man vielleicht in der 9. Schulstufe eine erste Funktionsdefinition versucht. Erste Aktivitäten zum Aufbau entsprechender kognitiver Strukturen sollten bereits im Kindergarten angeregt werden.

Im Unterricht der Sekundarstufen wird beim Funktionenlernen viel zu sehr an den Prototyp „Term“ gedacht. Die Entwicklung der kognitiven Strukturen wird aber altersgemäß viel besser unterstützt, wenn man mit Tabellen, verbalen Beschreibungen („Wortformeln“) und Graphen beginnt. Der Computer kann dabei als didaktisches Werkzeug eine große Hilfe sein.



Dem versuchen wir durch **„Technolgiegestützte Lernpfade“** Rechnung zu tragen [http://rfdz.ph-noe.ac.at]. Es handelt sich dabei um Lernsequenzen, die von den Schüler(innen) in selbsttätigem, experimentellem Lernen bearbeitet werden können. Angeboten werden dazu auch Arbeitspläne für den Ablauf. Lehrer(innen) können aber einzelne Module aus den Lernpfaden nach ihren individuellen Konzepten in den Unterricht einbauen.

Im Rahmen des Vortrages werden 2 Lernpfade vorgestellt:

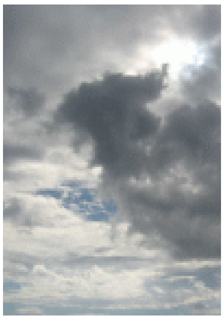
Lernpfad „Schnittstelle Volksschule- Sek I“

Unterstützt durch Arbeitsblätter sollen die Schüler(innen) schritt-weise durch Klicken die Anzahl bestimmter Objekte (Blüten, Fußbälle, usw.) verändern, die Anzahl der Objekte bei jedem Schritt in eine Tabelle eintragen und eine Abhängigkeit in verbaler Form formulieren. Die beiden ersten Prototypen sind also die Tabelle und die Wortformel. Schon bei diesem Schnittstellenlernpfad zeigt sich, dass durch die Technologie das rekursive Modell zur Beschreibung von Abhängigkeiten eine zentrale

×	A	B
1	1	3
2	2	6
3	3	9
4	4	12
5	5	15

Bedeutung erlangt („was passiert bei jedem Schritt?“). Als Bonusaufgabe sollen sie auch versuchen schon eine Formel anzugeben, ein für diese Entwicklungsstufe sicher hoch gestecktes Lernziel.

Lernpfad „Wetter“ (5. Und 6. Schulstufe)



Jetzt tritt erstmals der Prototyp „Graph“ auf. Die Schüler(innen) können in einem Java Applet, in dem die Temperatur im Laufe eines Tages in Abhängigkeit von der Tageszeit eingezeichnet wird „Wetter machen“.

Sie arbeiten nun mit den Prototypen „Graph“, „Wortformel“ und „Tabelle“. Aufgaben sind, Graphen verbal zu beschreiben, zu Texten Graphen entwickeln, aus Graphen Werte ablesen und in Tabellen eintragen usw.

Ausblick: Derzeit arbeiten wir an technologiegestützten Lernspiralen, das heißt an einer Sequenz von Lernpfaden, die das Funktionenlernen von der 5. bis zur 12. Schulstufe unterstützen sollen. Themen sind die verschiedenen Funktionsarten vom direkten/indirekten Verhältnis bis hin zu Exponentialfunktionen und ihrer Nutzung bei Wachstumsprozessen.

Zusammenfassung: Typische Aktivitäten der Kompetenzentwicklung beim Darstellen und Modellbilden:

- ⇨ Vom realen Problem zum realen Modell: Entwickeln eines Textkonzentrats, einer „Wortformel“:
  - Formulieren des Problems in eigenen Worten.
  - Was ist gegeben – was ist gesucht?“
  - Aus längeren Texten das Wesentliche herausarbeiten (z.B. bei Hausübungen nicht den ganzen Text abschreiben, sondern nur eine Kurzform).
  - Vermuten von Mathematisierungsmustern in Daten, Graphen usw. und verbalisieren dieser Vermutung.
- ⇨ Entwickeln einer Übersetzungskompetenz von Deutsch in Mathematik und umgekehrt – „Vokabelheft“.
- ⇨ Erkennen von Abhängigkeiten zwischen Größenbereichen (funktionale Abhängigkeiten).
  - Verbale Beschreibung der Abhängigkeit („Wortformel“)
  - Grafisches Formulieren (Skizze)
  - Entscheiden für einen geeignete Darstellungsform (Prototyp der Funktion). In der Sekundarstufe I wird in der 1. Phase der Kompetenzentwicklung meist die Tabelle geeignet sein, erst aus der verbalen Beschreibung der Mathematisierungsmuster entwickelt sich dann langsam die Formel als Darstellungsform. Parallel dazu kann auch die verbale Beschreibung von Abhängigkeiten in einem Funktionsgraphen versucht werden.
  - Wechsel der Darstellungsform: Tabelle ⇔ Graph, Tabelle ⇔ Formel, Graph ⇔ Formel
- ⇨ Aufbau eines „Modellpools“: Kompetenzentwicklung beim Modellieren ist gekennzeichnet durch die Findung, Erforschung und Nutzung neuer Funktionstypen (direktes/indirektes Verhältnis, lineare Funktion, prozentuales Wachstum, quadratische Funktion, usw.)

- ⇨ Entscheidung für ein geeignetes Modell: Diese Kernkompetenz des Handlungsbereiches „Darstellen, Modellbilden“ erfordert als Voraussetzung die Kompetenzentwicklung in den davor aufgelisteten Bereichen. Wie schon angesprochen, ist diese Entscheidung keine innermathematische, sondern ein Abwägen, welches der bis zu dieser Entwicklungsstufe bekannten Modelle das Realproblem am besten repräsentieren.
- ⇨ Lösen von Problemen, in denen alle 4 Handlungsbereiche erforderlich sind

4.2 Schwerpunkt: Argumentieren, Begründen

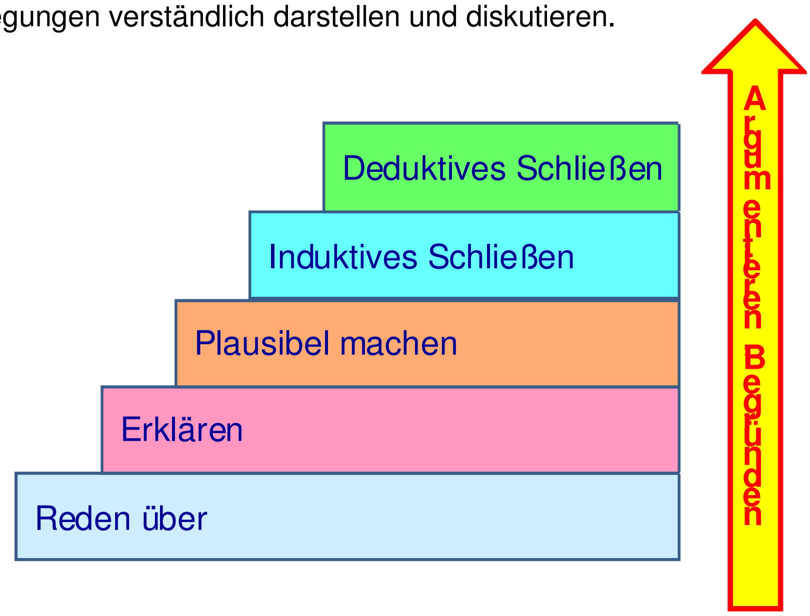
Am Beginn erfolgt wieder die Begriffsklärung anhand der Definitionen aus dem Kompetenzmodell für Standards:

- ⇨ Argumentieren meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.
- ⇨ Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt.

Gerade in der Sekundarstufe I wurde diese Definition als abschreckend empfunden. Vor allem Vertreter(innen) der Hauptschule erklärten, diese Kompetenz wäre in 2. oder 3. Leistungsgruppen nicht erreichbar. Natürlich ist diese Definition nicht so gemeint, dass Kompetenzentwicklung mit deduktivem Schließen beginnt. Es wird ja eine Erwartung ausgedrückt und über den Weg dorthin nichts ausgesagt. Außerdem ist von einer „adäquaten“ Verwendung der mathematischen Sprache die Rede, also auch von einer alters- und niveauadäquaten.

Vielleicht sollte man aber in der Sekundarstufe I unter Berücksichtigung des Entwicklungsprozesses die obigen Definitionen etwas entschärfen:

- ⇨ **Argumentieren** meint die Angabe von adäquaten Aspekten (altersmäßig und dem Problem entsprechend), die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen
- ⇨ **Begründen** meint die Angabe von Argumentationen, die zu bestimmten Entscheidungen/Schlussfolgerungen führen
- ⇨ Diese Deutung schließt auch das Kommunizieren mit ein: **Kommunizieren** meint Überlegungen verständlich darstellen und diskutieren.



Argumentieren beginnt in diesem Sinne also nicht erst beim strengen mathematischen Beweisen, erste Schritte werden von Kleinkindern gesetzt, wenn sie über ihr Handeln reden. Und diese Kultur des „Redens über“ wird im Mathematikunterricht weiter entwickelt bis hin zu Denktechnologien des Beweisens.

Ein Leitfaden für die Kompetenzentwicklung in diesem Bereich könnte die Aussage von H. Freudenthal sein:

„Kinder sollen zuerst vermuten lernen, bevor sie beweisen lernen“

Kompetenzentwicklung beim Argumentieren, Begründen

- ⇨ **Reden über**: Die Schüler(innen) über ihr Tun reden lassen: Reden über Operationen; reden über Modellentscheidungen und Lösungswege, reden über Abhängigkeiten: Geschichten erfinden lassen und erzählen.
- ⇨ **Erklären**: Damit ist auch schon ein Deuten beruhend auf Erfahrungen verbunden.
- ⇨ **Plausibel machen**: Begründen aus der Erfahrung
- ⇨ **Induktives Schließen**: Gerade in der Sekundarstufe I ist deduktives Schließen noch nicht altersgemäß zugänglich. Man schließt aus einer Anzahl gesicherter Überprüfungen auf die Gültigkeit einer Regel, eines Algorithmus, usw.
- ⇨ **Deduktives Schließen**: Ziel der Kompetenzentwicklung sollte auch in der Sekundarstufe I (zumindest in ersten Leistungsgruppen und im Gymnasium) eine altersadäquate Kompetenz im **deduktiven Schließen** sein. Besonders eignet sich dazu das Gebiet Geometrie, weil in diesem Gebiet das deduktive Schließen durch Skizzen und Konstruktionen sehr gut unterstützt werden kann. Die passende Lernform ist eher das gelenkte Entdecken. In der Sekundarstufe II sollte natürlich das deduktive Schließen ein explizit angestrebtes Lernziel sein.

Alle Lehrer(innen) der Sekundarstufe II, die ich befragt habe, betonen, dass sie natürlich auch Beweise machen, viele verlangen sie aber von den Schüler(innen) nicht. Dazu kann ich nur Andreas Pallack aus Nordrhein Westfalen zitieren, der bei seinem Vortrag in Wien über Zentralabitur in NRW gesagt hat: *„Was nicht geprüft wird, wird auch nicht gelernt“.* Natürlich werden erste Beweisschritte reproduktiv gelernt, aber ehrlich gefragt: Wie ist es uns beim Studium gegangen? Diese reproduktive Lernaktivität erzeugt doch schließlich jene Denktechnologien, die auch ein elaboratives deduktives Schließen ermöglichen.

Beispiele im Rahmen des Vortrages beschäftigen sich mit folgenden Lernaktivitäten

(1) „Reden über“

Anstatt nur auf Rechenfertigkeit hinzuarbeiten, sollte man sich Zeit nehmen, über den verwendeten Algorithmus zu reden:

- ☞ **Reden über das dekadische Zahlensystem**

  „28:7 = 13“. Ist es wirklich falsch oder nur ungewöhnlich angeschrieben?

- ☞ **Reden über das Subtrahieren**

  Wie ändert sich die Differenz, wenn man zu Minuend und Subtrahend die gleiche Zahl addiert, subtrahiert, usw.?

  Was passiert beim schriftlichen Subtrahieren? Was ist der Unterschied zwischen der österreichischen Methode des indirekten Addierens („3 und wie viel ist…“) und der anglo-amerikanischen Methode des direkten Subtrahierens? Keiner meiner Lehramtsstudenten konnte mir erklären, was bei der „österreichischen“ Methode passiert, welche Gesetzmäßigkeit dahinter steckt.

☞ **Reden über das Dividieren**

Was passiert beim „Nullen streichen"? Was passiert beim „Kommaverschieben"? Denkstrukturen, die hier „beredet" werden, sind doch die beste Grundlage für das Kürzen und Erweitern.

(2) Vom Vermuten zum Beweisen

Schüler(innen) sollen zuerst vermuten lernen, bevor sie beweisen lernen (Freudenthal).

Beispiel 2.1: Winkelsumme im Dreieck

Vermuten durch „Zerreißen von Dreiecken". Beweisen durch Parallelwinkel.

Beispiel 2.2: Extremwertaufgaben in der Sekundarstufe I

Suche unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang jenes mit dem größten Flächeninhalt.

Vermuten: Mit dem Taschenrechner oder mit Tabellenkalkulation aus Tabellen oder aus dem Graphen den größten Wert ablesen.

Beweisen: Ausgehend von der Vermutung, dass es das Quadrat ist, ein Quadrat mit der Seitenlänge a mit Rechtecken vergleichen, bei denen eine Seite um x größer und die andere Seite um x kleiner ist (also der Umfang gleich ist). Auch in der 4. Klasse (8. Schulstufe) kann man dann zeigen, dass
$(a + x).(a - x) = a^2 - x^2 < a^2$ ist, für $x \neq 0$.

(3) Vermuten mit Technologieunterstützung

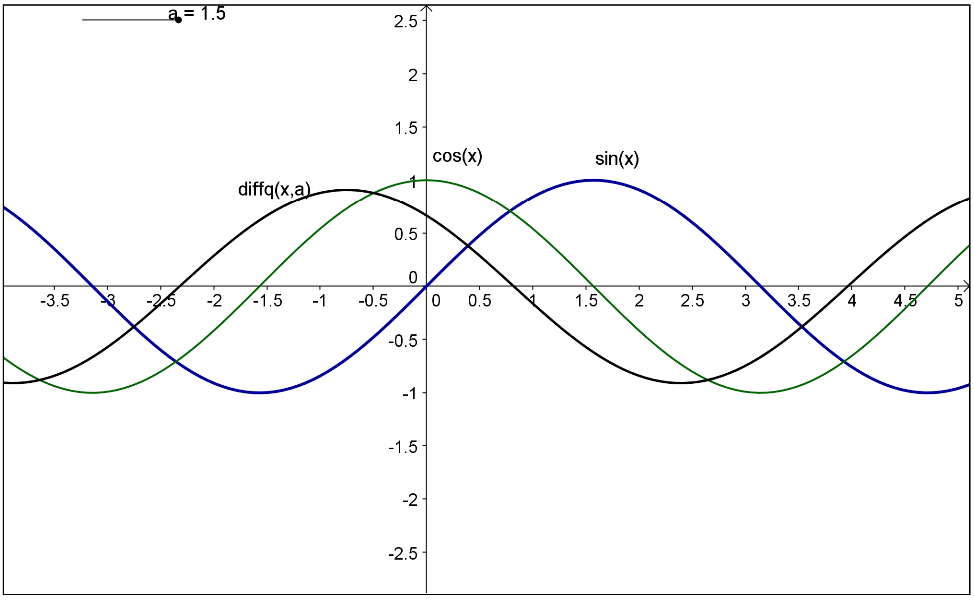
Adäquate technologische Werkzeuge unterstützen schon in der Sekundarstufe I die Kompetenzentwicklung beim Argumentieren und Begründen. Gerade in der heuristischen Phase des Lernprozesses, die gekennzeichnet ist durch Experimentieren und Vermuten, bietet Technologie eine Fülle von bisher nicht gekannten Möglichkeiten. Beispiele dafür sind Geogebra, Excel und die am regionalen Kompetenzzentrum in Baden entwickelten technologiegestützten Lernpfade [http://rfdz.ph-noe.ac.at].

Beispiel 3.1: Vermuten der Ableitung der Sinusfunktion

Eine saubere Herleitung der Ableitung trigonometrischer Funktionen ist nicht einfach und wird nur von wenigen Schüler(innen) nachvollzogen werden können. Zu einer Vermutung durch Experimentieren mit der Differenzenquotientenfunktion kann man aber mit Hilfe von Geogebra leicht kommen. Ich glaube, dass damit mehr Nachhaltigkeit und Verständnis erreicht wird als durch das Auswendiglernen eines nicht verstandenen Beweises.

Man definiert die Funktion $\text{diffq}(x, a) = \frac{\sin(x + a) - \sin(x)}{a}$.

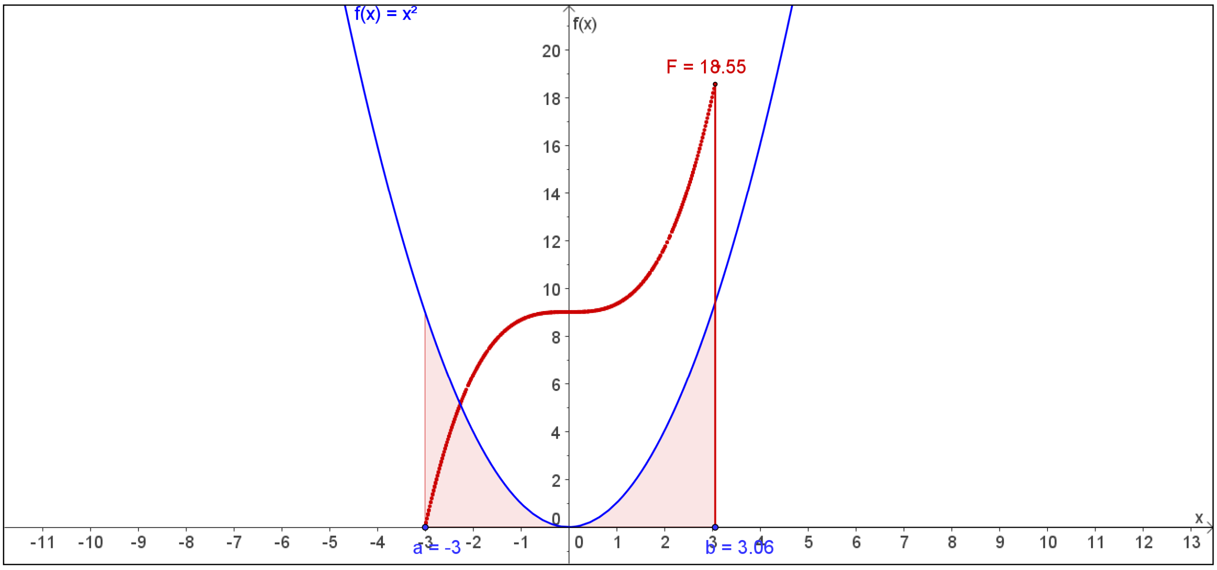
Dann lässt man mit Hilfe eines Schiebereglers a zwischen -1,5 und +1,5 wandern. Für a gegen 0 beobachtet man, dass die „diffq-Funktion" gegen cos(x) wandert und für x=0 verschwindet, da der Differenzenquotient nicht existiert.



Beispiel 3.2: „Flächenihaltsfunktion“

Sehr schwierig für Schülerer(innen) ist das Verstehen des Zusammenhangs zwischen der Flächeninhaltsfunktion mit fester unterer Grenze a und variabler oberer Grenze b und der Stammfunktion. Auch hier werden eher nur wenige Schüler(innen) den Beweis des Fundamentalsatzes nachvollziehen können. Durch Experimentieren mit einem „Geogebra-applet“, wie man sie auf der Webseite von Geogebra findet, kann man anschaulich zu einer Vermutung kommen.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Farblich unterlegt wird die Flächeninhaltsfunktion mit a= -3 und variablem b. Im „Zugmodus“ kann man die obere Grenze b verändern. Aus der Spur der Funktionswerte erkennt man eine Funktion 3. Grades vom Typ „ $k \cdot x^3 + c$ “.



(4) Argumentieren durch Operieren

Mathematische Argumentation erfolgt sehr oft durch Operieren, das heißt durch logisch richtige Operationen zum Beweis der Richtigkeit einer Behauptung zu kommen. Man denke nur an das Studium, wo sich solche Argumentationen über sechs riesige Tafeln des großen Hörsaales erstreckt haben.

Wenn mathematische Denktechnologie einen Bildungswert hat, ist es unvorstellbar, dass Operieren nicht auch (vielleicht aber weniger als derzeit) von Bedeutung im Unterricht ist. Es kann nicht den Experten überlassen werden, wo es doch Ziel höherer Allgemeinbildung ist, auf die Rolle des Experten vorzubereiten.

Oft führt das Operieren zu einer klareren Überzeugung als nur „zu reden über…".

Beispiel 4.1: „Seil um den Äquator"

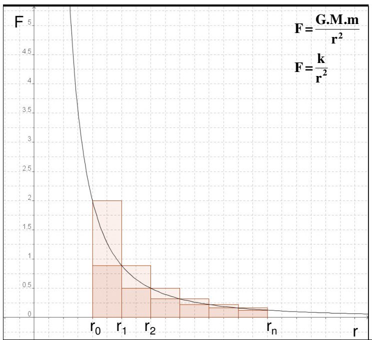
Um den Äquator ist ein Seil gespannt, das um 1 m länger ist als der Umfang des Äquators. Kommt eine Maus unter dem Seil durch?

- ⇨ Löse das Problem zuerst mit dem Taschenrechner und dann allgemein.
- ⇨ Nimm statt der Erde eine Orange.

Beispiel 4.2: Arbeit im Gravitationsfeld

Die erste Integralrechenstunde könnte schon im Physikunterricht der 6. Klasse sein, wenn man versucht, die Arbeit im Gravitationsfeld herzuleiten.

Man entwickelt eine Formel für die Untersumme und eine für die Obersumme, aus dem Vergleich der beiden Formeln könnte man zu einer „Kompromissformel" kommen, bei der der Flächeninhalt unter der „Kraftkurve" zwischen Untersumme und Obersumme liegt. Beim Vereinfachen und Umformen stellt sich heraus, dass der „Kompromiss" der erwarteten Formel entspricht.



Arbeit im Gravitationsfeld

Arbeit = Kraft x Weg

⇔ Flächeninhalt unter der „Kraftkurve"

$$W_{grav} = G.M.m.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$W_u = \frac{k}{r_1^2}.(r_1-r_0) + \frac{k}{r_2^2}.(r_2-r_1) + \frac{k}{r_3^2}.(r_3-r_2) + \dots + \frac{k}{r_n^2}.(r_n-r_{n-1})$$

$$W_o = \frac{k}{r_0^2}.(r_1-r_0) + \frac{k}{r_1^2}.(r_2-r_1) + \frac{k}{r_2^2}.(r_3-r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}^2}.(r_n-r_{n-1})$$

$$W_u = \frac{k}{r_1^2}.(r_1-r_0) + \frac{k}{r_2^2}.(r_2-r_1) + \frac{k}{r_3^2}.(r_3-r_2) + \dots + \frac{k}{r_n^2}.(r_n-r_{n-1})$$

$$W_o = \frac{k}{r_0^2}.(r_1-r_0) + \frac{k}{r_1^2}.(r_2-r_1) + \frac{k}{r_2^2}.(r_3-r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}^2}.(r_n-r_{n-1})$$

$$W_{komp} = \frac{k}{r_0.r_1}.(r_1-r_0) + \frac{k}{r_1.r_2}.(r_2-r_1) + \frac{k}{r_2.r_3}.(r_3-r_2) + \dots + \frac{k}{r_{n-1}.r_n}.(r_n-r_{n-1})$$

$$W_{komp} = k.\left(\frac{1}{r_0} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \cancel{\frac{1}{r_3}} + \dots - \cancel{\frac{1}{r_{n-1}}} + \cancel{\frac{1}{r_{n-1}}} - \frac{1}{r_n}\right)$$

$$W_{komp} = k.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) \Rightarrow W_{grav} = G.M.m.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Beispiel 4.3: Welche Partei ist besser?

[Bürger-Fischer-Malle**,** Mathematik Oberstufe Band 2]

In der Fernsehdiskussion diskutieren 2 Politiker der Parteien A und B über die Einkommensveränderung der Bevölkerung seit 2002. Das bei solchen Diskussionen übliche „Reden über", kann durch Verwendung verschiedener Änderungsmaße unterstützt werden.

Argumentieren erfolgt hier besser nicht durch „Reden über", sondern durch operieren. Man berechnet verschiedene Änderungs-maße und diskutiert dann über Konsequenzen und über Brauchbarkeit der einzelnen „Änderungs-modelle":

Jahr	Einkommen	Partei
2002	4.800	A
2003	5.100	A
2004	5.500	A
2005	5.800	A
2006	6.200	A Wechsel zu B
2007	6.500	B
2008	6.900	B
2009	7.400	B

Welche Partei ist besser?

a) Absoluter Einkommenszuwachs

$\Delta E_A = 6200\text{-}4800 = 1400\,€$

$\Delta E_B = 7400\text{-}6200 = 1200\,€$

c) Relativer Einkommenszuwachs

$\frac{\Delta E_A}{E_{0A}} = \frac{6200\text{-}4800}{4800} = 0{,}29 = 29\,\%$

$\frac{\Delta E_B}{E_{0B}} = \frac{7400\text{-}6200}{6200} = 0{,}19 = 19\,\%$

b) Mittlerer Einkommenszuwachs

$\frac{\Delta E_A}{4} = \frac{1400}{4} = 350\,€$

$\frac{\Delta E_B}{3} = \frac{1200}{3} = 400\,€$

d) Änderungsfaktor

$\frac{E(2006)}{E(2002)} = \frac{6200}{4800} = 1{,}29$

$\frac{E(2009)}{E(2006)} = \frac{7400}{6200} = 1{,}19$

An diesem Beispiel kann man sehr schön zeigen, dass die Modellentscheidung keine inner-mathematische Tätigkeit ist, die mit wahr oder falsch beantwortet werden kann, sondern ein Abwägen, welches der verfügbaren Modelle die Wirklichkeit am besten beschreibt.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bei anwendungsorientierten Aufgaben, bei denen Daten nur näherungsweise angegeben werden können, eigentlich mit Ungleichungen gerechnet werden muss. Somit erfolgt das Argumentieren wieder durch Operieren.

Beispiel 4.4: Preissteigerungsrate mit Unschärfen

(a) Ermittle die Preissteigerungsrate aus den Kosten W eines „Warenkorbes“:

im Jahr 2008 $\quad$ W1 = 6.740.-- €

im Jahr 2009 $\quad$ W2 = 7.060.-- €

$$r = \frac{W_2 - W_1}{W_1} = \frac{7.060 - 6.740}{6.740} = 0{,}0474 \to 4{,}7\%$$

(b) Die Daten seien mit einer Unschärfe von ±1% behaftet. In welchem Intervall liegt dann die Preissteigerungsrate?

$$6.405{,}3 \le W_1 \le 64$$

$$6.989{,}4 \le W_2 \le 7.130{,}6$$

$$182 \le W_2 - W_1 \le 458$$

$$0{,}027 \le \frac{W_2 - W_1}{W_1} \le 0{,}068$$

$$2{,}7\% \le r \le 6{,}8\%$$

(c) Annahme: Der Fehler sei ±5%

$$-5{,}2\% \le r \le +15{,}8\%$$

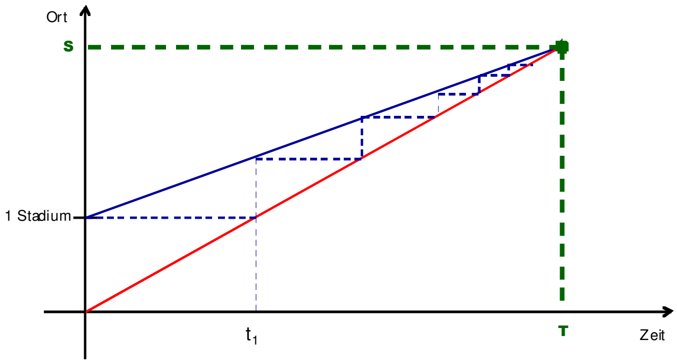
(5) Argumentieren durch Visualisieren

Die Möglichkeit der grafischen Repräsentation abstrakter Objekte unterstützt das Argumentieren und Begründen. Das ist in der Sekundarstufe I besonders in der Geometrie von Bedeutung. In der Sekundarstufe II eignen sich die grafischen Prototypen funktionaler Abhängigkeiten besonders für das Argumentieren und Begründen.

Beispiel 5.1: Achilles und die Schildkröte

(Zenon v. Elea, 500 v. Chr.)

Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von 1Stadium (ca. 180m) vor ihm herkriecht, wobei seine Geschwindigkeit 12-mal so groß ist wie jene der Schildkröte. Holt Achilles die Schildkröte ein?



Die Visualisierung des Problems zeigt, dass die Summe unendlich vieler Strecken endlich sein kann.

Zusammenfassung

Kompetenzentwicklung muss der Entwicklungsstufe der Lernenden angepasst sein, muss im Sinne des Spiralprinzips einen Kompetenzaufbau erkennen lassen. Kompetenzentwicklung erfordert ein ständiges aktives „Wieder-Holen“ der Kompetenzen anhand aktueller Problemstellungen. Bezüglich Argumentieren und Begründen müssen sich die Schüler(innen) an die Frage „warum?“ gewöhnen.

Kompetenzorientiertes Unterrichten erfordert nicht, alles bisher Gemachte über Bord zu werfen, man braucht nur eine neue Brille. Viele Aufgaben, die bis jetzt aus der Sicht der Rechenfertigkeit interessant waren, können durch eine leicht geänderte Fragestellung zu Aufgaben für das Argumentieren und Begründen umfunktioniert werden.

Literatur

Zusätzlich zu den österreichischen Schulbüchern:

Bruder, Regina (2006): „Konzepte für nachhaltiges Lernen von Mathematik“ Vortrag an der TU Kaiserslautern, 2006. Homepage: http://www.math-learning.com/

Dörfler, Willi. (1991): „Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium“ in Computer - Mensch-Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, S. 51. ISBN3-209-01452-3

Dewdey, A.K. (1994): „200 Prozent von Nichts“. Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin, 1994. ISBN 3-7643-5021-0

Herget, W; Scholz, D. (1998): „Die etwas andere Aufgabe“. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 1998, IBN 3-7800-4188-X

Herget, W; Jahnke, Th; Kroll, W. (2001): „Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I“. Cornelsen Verlag Berlin, 2001. ISBN 3-464-54360-9

Leuders, Timo (2006): „Aspekte von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht“ in: „Bildungsstandards Mathematik: konkret.“ Blum, W. u.a. Hrsg. 2006. Cornelsen Verlag. ISBN-13: 978-3-589-22321-3

Peschek, W.; Heugl H. (Hrsg.), (2007): „Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8.Schulstufe“ Version4/07. Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. Homepage des Institutes: http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/295.htm

Reusser, Kurt, 2009: „Regulations- und Anreizsysteme im Kontext der Einführung von Bildungsstandards“. Vortrag im Rahmen der Tagung: „Standards im Bildungsbereich: Effekte und Nebenwirkungen“ 2009 in Wien.

Schmidt, G; Lergenmüller, A.(2001): „Mathematik 7 Neue Wege; Arbeitsbuch für Gymnasien 7. Schulstufe“. Schroedel Verlag, Hannover , 2001.
ISBN 3-507-85457-0

Schmidt, G; Lergenmüller, A.(2003): „Mathematik 8 Neue Wege; Arbeitsbuch für Gymnasien 8. Schulstufe“. Schroedel Verlag, Hannover , 2003.
ISBN 3-507-85524-0

Links zum Thema

http://www.uni-klu.ac.at/idm/: Homepage des Instituts für Didaktik der Mathematik an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

http://www.bifie.at/bildungsstandards: Webseite des BIFIE: Bildungsstandards, Publikationen.

http://aufgabenpool.bifie.at/m7/: Standard- und kompetenzorientierter Aufgabenpool. Suchmöglichkeit nach Handlungsbereichen, Schulstufen usw.

http://rfdz.ph-noe.ac.at: Webseite des Regionalen Fachdidaktikzentrums an der PH Baden: Technologiegestützte Lernpfade

http://did.mat.uni-bayreuth.de/: Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Bayreuth: SINUS Transfer; Smart – die Aufgabendatenbank usw.

http://www.bildungsserver.de/db/mlesen.html?Id=12241: Deutscher Bildungsserver

http://blk.mat.uni-bayreuth.de/indexblk.html: Server des BLK-Programms (Bundes-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung)

http://www.mathebuch.at/: Dorfmayr, Anita: Webseite zum „Mathe Buch“ VNS (Verlag Neues Schulbuch)

http://www.leu-bw.de/: Landesinstitut für Schulentwicklung (Baden Württemberg): Bildungspläne: Angebote für allgemein bildende Schulen, für berufliche Teilzeit- und Vollzeitschulen

http://www.acdca.ac.at/: Homepage von ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)

http://www.prolehre.de: Lehrerfortbildung zur Kompetenzförderung im MU (TU Darmstadt)

http://www.madaba.de: Aufgabendatenbank für Lehrkräfte (TU Darmstadt)

http://www.problemloesenlernen.de: Materialplattform (TU Darmstadt)

http://www.amustud.de: Anwendungsorientierter MU (TU Darmstadt)